Proponowane Rozwiązania

Zadanie 1. *Znajdz granicę:*

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{n^2}^{n^2+2} \frac{\sqrt{x}-3\sin(x)}{x}dx$$

Rozwiązanie: Będziemy korzystać z faktu, że jeśli f, g są takie, że $\forall_{x\in[a,b]}$ mamy $f(x) \leq g(x)$ to również $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Naszą funkcję $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3\sin(x)}{x}$ na przedziale $[n^2, n^2+2]$ (powiedzmy dla $n \geq 4$) możemy oszacować z góry przez $\frac{\sqrt{n^2+2}+3}{n^2}$ (z uwagi na nieujemność, mianownik robimy możliwie mały, licznik możliwie duży), natomiast z dołu przez $\frac{n-3}{n^2+2}$ (tutaj licznik możliwie mały, mianownik możliwie duży, ponownie dzięki nieujemności). Pozwoli nam to otrzymać:

$$n\int_{n^2}^{n^2+2} \frac{n-3}{n^2+2}dx \leq n\int_{n^2}^{n^2+2} \frac{\sqrt{x}-3\sin(x)}{x}dx \leq n\int_{n^2}^{n^2+2} \frac{\sqrt{n^2+2}+3}{n^2}dx$$

Oczywiście całki po lewej i po prawej to całki z stałych, więc bez kłopotu dostajemy oszacowanie:

$$2n\frac{n-3}{n^2+2} \leq n\int_{n^2}^{n^2+2} \frac{\sqrt{x}-3\sin(x)}{x}dx \leq 2n\frac{\sqrt{n^2+2}+3}{n^2}$$

Granica dolnego jak i górnego oszacowania, przy $n \to \infty$ wynosi oczywiście 2, skąd z Tw. o 3 funkcjach dostajemy, że szukana granica to również 2.

PS: Oczywiście, można było znaleźć dokładne wartości $\sup$ i $\inf$ funkcji podcałkowej na przedziale $[n^2, n^2+2]$. Jednak bardzo często, gdy granice całkowania zachowują się w pewnym sensie asymptotycznie (czyli np. granica ich ilorazu wynosi 1, jak w tym przypadku), to dobrym pomysłem jest najpierw sprawdzić, czy takie brutalne szacowanie jak powyżej nie zadziała. Zazwyczaj pozwala ono zachować asymptotykę wyrażeń, czyli to co tak naprawdę interesuje nas przy granicach.

Zadanie 2. *Znajdź granicę:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(\cos(x^2) - \int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sin(t^2)}dt)$$

Rozwiązanie: Policzymy najpierw granicę:

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sin(t^2)}dt$$

Funkcja $t \to \frac{1}{\sin(t^2)}$ jest malejąca np. na przedziale $(0,1)$, skąd szacowanie $\frac{1}{\sin(x^2+2x^3+x^4)} \leq \frac{1}{\sin(t^2)} \leq \frac{1}{\sin(x^2)}$ na przedziale $(x, x+x^2)$, który np. dla $x < \frac{1}{2}$ zawiera się w przedziale $(0,1)$. Skąd otrzymujemy:

$$\int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sin(x^2+2x^3+x^4)}dt \leq \int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sin(t^2)}dt \leq \int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sin(x^2)}$$

Ponownie, całki po obu stronach to całki z stałych, więc

$$\frac{x^2}{\sin(x^2+2x^3+x^4)} \leq \int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sin(t^2)}dt \leq \frac{x^2}{\sin(x^2)}$$

Gdy $x \to 0^+$, to zarówno oszacowanie dolne, jak i oszacowanie górne, zbiegają do 1. Stąd szukaną granicą (Tw. o 3 funkcjach) jest również 1.
Pozwala to zastosować regułę L'Hopitala przy liczeniu wyjściowej granicy. Z racji, że (gdzie G jest pierwotną funkcji $t \to \frac{1}{\sin(t^2)}$)

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sin(t^2)}dt = \frac{d}{dx}\big(G(x+x^2) - G(x)\big) = \frac{1+2x}{\sin((x+x^2)^2)} - \frac{1}{\sin(x^2)}$$

Pozostaje zbadać granicę (pochodna funkcji $x \to \cos(x^2)$ wynosi $-2x\sin(x^2)$, zaś powyższe wyrażenie sprowadzamy do wspólnego mianownika)

$$\lim_{x\to 0^+} -2x\sin(x^2) - \frac{(1+2x)\sin(x^2) - \sin((x+x^2)^2)}{\sin(x^2)\sin((x+x^2)^2)}$$

Pierwszy składnik oczywiscie zbiega do 0, natomiast drugi, przy pomocy rozwinięcia Taylora funkcji $\sin$, sprowadzamy do postaci:

$$\frac{(1+2x)(x^2+o(x^4)) - (x+x^2)^2 + o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \frac{x^2+2x^3-x^2-2x^3-x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

co przy $x \to 0^+$ dąży do -1. Zatem szukaną granicą jest 1 (z uwagi na znak minus przed drugim wyrażeniem)

Zadanie 3. *Znajdź granicę*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+5}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{k}{n^3}}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

Oznaczmy to wyrażenie pod znakiem sumy jako $f(k,n)$. Wówczas mamy znaleźć granicę $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+5} f(k,n)$. Nietrudno stwierdzamy, że wyrazy $f(n+1,n), f(n+2,n), f(n+3,n), f(n+4,n), f(n+5,n)$ wraz z $n\to\infty$ zbiegają do 0. Pozostałoby więc zbadać granicę $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k,n)$. Rozpisujemy:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k,n) = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

Oczywiście $\frac{1}{n}\to 0$ oraz $n\ln(1+\frac{1}{n})\to 1$ wraz $n\to\infty$. Jeśli chodzi o sumy, to zauważmy, że są to sumy Riemanna funkcji odpowiednio $x\to\frac{1}{1+x^2}$ oraz $x\to\frac{x}{1+x^2}$ na przedziale $[0,1]$ z podziałem na n odcinków długości $\frac{1}{n}$. Z racji, że średnica podziału zbiega do 0 (a całki istnieją), to mamy zbieżność:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\to\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

oraz (podstawiamy $t=x^2$)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2}\to\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\frac{1}{2}\ln(2)$$

Zatem ponownie prosta arytmetyka granic, daje nam

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+5}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{k}{n^3}}{1+(\frac{k}{n})^2}=1\cdot\frac{\pi}{4}+0\cdot\frac{1}{2}\ln(2)+0+0+0+0+0=\frac{\pi}{4}$$

PS. Rachunek z granicą wyrażenia

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

nie musiał zostać przeprowadzony do końca. Wystarczyło tutaj zauważyć, że wyrazy pod sumą są dodatnie, więc szacując brutalnie licznik przez $\frac{n}{n}$, zaś mianownik przez 1 dostalibyśmy oszacowanie:

$$0\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1}=1$$

więc przemnażając tę suę dodatkowo przez $\frac{1}{n}$, które zbiega do 0, całość również będzie zbiegać do 0. Rachunek przeprowadziłem wyłącznie w celu poćwiczenia zamiany granicy sum Riemanna na całkę.

Zadanie 4. *Dla jakich* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *zbieżna jest całka*

$$\int_{\pi}^{\infty} x^{\alpha}(x-\pi)^{\beta}\sin(x)dx$$

Rozwiązanie: Oczywiście potencjalne problemy są tylko krańcach przedziału całkowania, to znaczy niezależnie od α, β funkcja $x \to x^{\alpha}(x-\pi)^{\beta}\sin(x)$ jest ciągła na każdym przedziale $[\pi+\delta, M]$ dla dowolnych δ, M dla których $\delta > 0, M > \pi+\delta$. Skoro jest tam ciągła, a przedział jest domknięty, to całka $\int_{\pi+\delta}^{M} x^{\alpha}(x-\pi)^{\beta}\sin(x)dx$ jest skończona, niezależnie od α, β dla dowolnych δ, M jak wyżej. Musimy więc zbadać zbieżność całki na przedziałach $(\pi, \pi+\delta)$ jak i (M, ∞) dla pewnych, wygodnych dla nas δ, M. Zaczniemy od przedziału $(\pi, \pi+\delta)$. Wybierzmy $\delta > 0$ takie, aby $\sin(x) < 0$ na $(\pi, \pi+\delta)$ (np $\delta = \frac{\pi}{2}$). Wówczas funkcja $x^{\alpha}(x-\pi)^{\beta}\sin(x)$ jest stałego znaku na przedziale $(\pi, \pi+\delta)$, więc możemy stosować kryterium asymptotyczne, porównując naszą całkę z całką $\int_{\pi}^{\pi+\delta}(x-\pi)^{\beta}\sin(x)dx$ (takie porównanie z uwagi na skończoną niezerową granicę: $\lim_{x\to\pi^{+}} \frac{x^{\alpha}(x-\pi)^{\beta}\sin(x)}{(x-\pi)^{\beta}\sin(x)} = \pi^{\alpha} \in (0,\infty)$). Podstawiając $y = x-\pi$ dostajemy do zbadania zbieżność całki $\int_{0}^{\delta} y^{\beta}\sin(y+\pi)dy = -\int_{0}^{\delta} y^{\beta}\sin(y)$, która znowu na mocy kryt. asymptotycznego (funkcja ma stały znak!) jest porównywalna z $-\int_{0}^{\delta} y^{\beta+1}dy$, która jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta > -2$. Przejdziemy teraz do drugiego przedziału, czyli (M,∞) (odpowiednie M dobierzemy za chwilę). Jeśli $\alpha+\beta \geq 0$, to $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} x^{\alpha}(x-\pi)^{\beta}\sin(x)dx$ jest oddalone od 0, gdy n jest dostatecznie duże, czyli na mocy warunku Cauchy'ego nie mamy zbieżności całki niewłaściwej. (Istotnie, funkcja podcałkowa na takim przedziale jest dodatnia, więc całkę możemy oszacować z dołu przez $(2n\pi)^{\alpha}(2n\pi-\pi)^{\beta}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin(x)dx = (2n\pi)^{\alpha+\beta}(1-\frac{1}{2n})^{\beta}$, które przy $\alpha+\beta > 0$ zbiega do ∞, a przy $\alpha+\beta = 0$ zbiega do 1 wraz z $n \to \infty$.) Rozważmy teraz przypadek $\alpha+\beta < 0$. Zapisując całkę następująco: $\int_{M}^{\infty} x^{\alpha+\beta}(1-\frac{\pi}{x})^{\beta}\sin(x)dx$ będziemy dążyć do użycia kryterium Dirichleta. Oczywiście całki $\int_{M}^{K}\sin(x)dx$ są wspólnie ograniczone przez 2. Mamy również zbieżność $x^{\alpha+\beta}(1-\frac{\pi}{x})^{\beta} \to 0$ wraz z $x \to \infty$, z uwagi na założenie $\alpha+\beta < 0$. Pozostaje wykazać monotoniczność. Oznaczmy $\gamma = \alpha+\beta$ dla prostoty zapisu i policzmy pochodną dostając: $\gamma x^{\gamma-1}(1-\frac{\pi}{x})^{\beta} + \beta\pi(1-\frac{\pi}{x})^{\beta-1}x^{\gamma-2}$. Chcielibyśmy powiedzieć, że wyrażenie to jest ujemne, dla $x > M$ dla odpowiednio dobranego M. Istotnie też tak jest, zauważmy, że dzieląc powyższe przez $x^{\gamma-2}$ (czyli coś dodatniego dla dodatnich x), dostajemy $\gamma x(1-\frac{\pi}{x})^{\beta} + \beta\pi(1-\frac{\pi}{x})^{\beta-1}$, co wraz z $x \to \infty$ zbiega do $-\infty$ zważając na $\gamma < 0$. W szczególności więc, dla dostatecznie dużych x, znak pochodnej jest ujemny. Weźmy więc takie M, aby dla $x > M$ znak pochodnej był ujemny, tym samym dostając monotonicznosc naszej funkcji $x^{\alpha+\beta}(1-\frac{\pi}{x})^{\beta}$, które pozwala zastosować kryt Dirichleta, czyli w tym wypadku mamy zbieżność. Łącząc dwa przypadki, dostajemy zbieżność całki wtedy i tylko wtedy gdy $\begin{cases} \beta > -2 \\ \alpha+\beta < 0 \end{cases}$